

Polinomios y fracciones algebraicas**Dividir un polinomio por x-a. Regla de Ruffini****Factorización de polinomios****Divisibilidad de polinomios****Fracciones algebraicas. Operaciones. Simplificación**

Antes de mostrarte algunos ejercicios relacionados con este tema queremos recordarte algunos conceptos que debes tener en cuenta.

- Se define como **valor numérico de $p(x)$ para $x = a$** al valor que resulta de sustituir x por el valor a y realizar las operaciones indicadas. Se representa por **$p(a)$** .
- Cuando **$p(a) = 0$** decimos que el valor **a** , que hemos sustituido, es una raíz del polinomio.
- Teorema del resto: cuando se divide un polinomio **$p(x)$** por **$(x - a)$** , el resto que se obtiene en dicha división coincide con **$p(a)$** , valor numérico del polinomio para **$x = a$** .

Conclusión: si $x = a$, es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces $(x-a)$ será uno de sus divisores y el citado polinomio admitirá una factorización de la forma: $p(x) = (x-a) \cdot c(x)$, donde $c(x)$ es el cociente de dividir $p(x)$ por $(x-a)$.

I.- REGLA DE RUFFINI-TEOREMA DEL RESTO

1.- Dado el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ se pide

- a) Calcular su valor numérico para $x = -1$.**
- b) Hallar el cociente y el resto de dividir $p(x)$ por $(x+1)$**

Solución

a) Valor numérico: $p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 4 = -1 - 3 - 2 + 4 = -2$.

b) Cociente y resto de dividirlo por $(x+1)$:

	1	-3	2	4
-1		-1	4	-6
	1	-4	6	
				-2
	Cociente			resto

Cociente: $c(x) = x^2 - 4x + 6$

Resto = -2 . Notemos que este valor coincide con el hallado en a)

2.- Aplica la regla de Ruffini para calcular $p(5)$ siendo $p(x) = x^4 - 3x^2 - 5x + 7$ **Solución**

Deberemos completar y ordenar, de mayor a menor, al polinomio $p(x)$ para que podamos aplicarle la regla de Ruffini. El polinomio $p(x)$ adoptará la forma: $p(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 5x + 7$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & -5 & 7 \\ 5 & & 5 & 25 & 110 & 525 \\ \hline & 1 & 5 & 22 & 105 & 532 \end{array}$$

$P(5) =$ resto de la división de $p(x)$ por $(x-5) = 532$

3.- Calcula el valor de m para que la división $(x^4 + 3x^3 + mx - 3) : (x + 3)$ sea exacta**Solución**

a) Primer procedimiento: Aplicaremos el teorema del resto

Si la división debe ser exacta necesariamente el resto (valor numérico para $x = -3$) debe valer cero.

$$\text{Valor numérico} = \text{resto} = (-3)^4 + 3(-3)^3 + m(-3) - 3 = 81 - 81 - 3m - 3 = 0 \Rightarrow m = -1$$

b) Segundo procedimiento: Regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & 0 & m & -3 \\ -3 & & -3 & 0 & 0 & -3m \\ \hline & 1 & 0 & 0 & m & -3-3m=0 \end{array}$$

El resto $-3 - 3m = 0 \Rightarrow m = -1$

4.- Calcula el valor de m para que el resto de la división $(3x^3 + mx^2 + x - 4) : (x - 3)$ sea igual a 8**Solución**

a) Primer procedimiento: Aplicaremos el teorema del resto

Si el resto (valor numérico para $x = 3$) debe ser 8 entonces

$$\text{Valor numérico} = \text{resto} = 3(3)^3 + m(3)^2 + (3) - 4 = 81 + 9m + 3 - 4 = 8 \Rightarrow 9m + 80 = 8 \Rightarrow m = -8$$

b) Segundo procedimiento: Regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & m & 1 & -4 \\
 3 & & 9 & 3m+27 & 9m+84 \\
 \hline
 & 3 & m+9 & 3m+28 & \boxed{9m+80=8}
 \end{array}$$

El resto $9m + 80 = 8 \Rightarrow m = -8$

II.- FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

Para factorizar un polinomio deberás tener en cuenta, no sólo la Regla de Ruffini, sino también otros procedimientos, muy útiles, ya estudiados en cursos anteriores como pueden ser:

- Sacar factor común
- Reconocimiento de productos notables, a saber:
 - Cuadrado de una suma: $a^2 + 2.a.b + b^2 = (a + b)^2$
 - Cuadrado de una diferencia: $a^2 - 2.a.b + b^2 = (a - b)^2$
 - Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Fórmula que nos permite hallar las raíces de una ecuación de 2º grado: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En los ejercicios que siguen aplicaremos, en cada caso, el procedimiento más conveniente. Además deberás tener en cuenta el siguiente teorema: “*si en un polinomio sus coeficientes son números enteros, sus posibles raíces enteras deberán ser también números enteros que dividan al término independiente de dicho polinomio*”

1.- Descomponer en factores los siguientes polinomios

a) $p(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$

Solución

Necesitamos encontrar, al menos una de sus raíces, para poder aplicar alguno de los procedimientos señalados anteriormente.

Sus posibles raíces enteras han de ser: +1, -1, +3, -3, +9 y -9.

Probamos con $x = 1 \Rightarrow p(1) = (1)^3 - (1)^2 + 9.1 - 9 = 0 \Rightarrow x = 1$ es una raíz de $p(x)$

Aplicando la regla de Ruffini a este resultado:

1	1	-1	9	-9
1	1	0	9	
1	0	9	0	0
	cociente			resto

Resultando que: $p(x) = (x-1) \cdot (x^2 + 9)$.

A su vez, el factor $(x^2 + 9)$ es irreducible por no tener raíces reales.

b) $p(x) = x^4 - 81$

Solución

Se trata de una diferencia de cuadrados luego $p(x) = x^4 - 81 = (x^2 - 9) \cdot (x^2 + 9)$

A su vez, el factor $(x^2 - 9)$ es una diferencia de cuadrados por lo que: $(x^2 - 9) = (x+3) \cdot (x-3)$

El factor $(x^2 + 9)$ es irreducible porque carece de raíces reales. Resulta finalmente que:

$$p(x) = x^4 - 81 = (x+3) \cdot (x-3) \cdot (x^2 + 9)$$

c) $p(x) = x^4 + x^2 - 20$

Solución

La ecuación $x^4 + x^2 - 20 = 0$, es una ecuación bi-cuadrada, por lo que podemos encontrar sus

raíces por la expresión:
$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 9}{2 \cdot 1} = -5 \text{ y } 4$$

Una primera factorización será $p(x) = (x^2 + 5) \cdot (x^2 - 4)$

El factor $(x^2 + 5)$ es irreducible porque carece de raíces reales.

El factor $(x^2 - 4)$ es una diferencia de cuadrados por lo que: $(x^2 - 4) = (x+2) \cdot (x-2)$

Resulta finalmente que: $p(x) = x^4 + x^2 - 20 = (x^2 + 5) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$

d) $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$

Solución

Una primera factorización la obtendremos sacando $2x$ factor común:

$$p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x(x^2 - 4x + 4)$$

A su vez $x^2 - 4x + 4$ es el cuadrado de una diferencia $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ resultando finalmente:

$$p(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x(x^2 - 4x + 4) = 2x \cdot (x-2)^2$$

III.- DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS.

Un polinomio $D(x)$ diremos que es divisible por otro $d(x)$, si la división $D(x) : d(x)$ es exacta o también si existe otro polinomio $c(x)$ de manera que:

$$D(x) = d(x).c(x)$$

4.- Si en una división de polinomios el dividendo es $D(x) = x^3 - 3x^2 - 4$, el cociente $c(x) = x^2 - x - 2$ y el resto -8 ¿cuál es el divisor?

Solución

Teniendo en cuenta que en una división entera: $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r$, si despejamos el valor del divisor $d(x)$ resulta:

$$d(x) = \frac{D(x) - r}{c(x)} = \frac{(x^3 - 3x^2 - 4) - (-8)}{x^2 - x - 2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - x - 2} = x - 2$$

Este resultado se obtiene realizando la división del numerador $x^3 - 3x^2 + 4$ entre el denominador $x^2 - x - 2$.

IV.- FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Realiza las operaciones que se indican

1.- $\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1}$. Denominador común $(x-1) \cdot (x+1) = x^2 - 1$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{(x+1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} - \frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{(x^2 + 2x + 1) - 3(x-1) + (x-2)}{(x-1) \cdot (x+1)} =$$

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

Resultado simplificado porque $x^2 + 2$ es irreducible.

2.- $\frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$. Denominador común $(x-2) \cdot (x+3) = x^2 + x - 6$

$$\frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6} = \frac{(1-x)(x-2)}{(x+3)(x-2)} + \frac{2x(x+3)}{(x-2)(x+3)} - \frac{x^2+5x-10}{(x-2)(x+3)} =$$

$$\frac{(1-x)(x-2) + 2x(x+3) - (x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x^2 - 2x + 12}{(x+3)(x-2)}$$

El resultado sólo podrá simplificarse si el numerador obtenido tiene como raíces $x = 2$ ó $x = -3$.

Para $x = 2$, el numerador toma el valor $2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 12 \neq 0$. Luego no puede simplificarse por $(x-2)$

Para $x = -3$, el numerador toma el valor $2 \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 12 \neq 0$. Tampoco se puede simplificar

por $(x+3)$. La fracción $\frac{2x^2 - 2x + 12}{(x+3)(x-2)}$ está totalmente simplificada

$$3.- \frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3 =$$

Solución

Factorizamos los denominadores; $\begin{cases} x^2+2x+1=(x+1)^2 \\ x-1=x-1 \end{cases}$ denominador común $(x+1)^2 \cdot (x-1)$

$$\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3 = \frac{x^2 \cdot (x-1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} - \frac{(2x-3) \cdot (x^2+2x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)^2} + \frac{3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} =$$

$$\frac{x^2 \cdot (x-1) - (2x-3)(x^2+2x+1) + 3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2 \cdot (x-1)} = \frac{2x^3 + x^2 + x}{(x+1)^2 \cdot (x-1)}$$

$$4.- \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) : \frac{x}{x+1} = \left(\frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \right) : \frac{x}{x+1} = \left(\frac{x+1-2x}{(x-1)(x+1)} \right) : \frac{x}{x+1} =$$

$$\frac{1-x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1-x}{(x-1)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-(-1+x)}{(x-1)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{x}$$

$$5.- \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) : \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] \cdot (x-1) = \left[\left(\frac{x^2+1}{x} \right) : \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \right] \cdot (x-1) = \left[\left(\frac{x^2+1}{x} \right) \left(\frac{x}{(x+1)(x-1)} \right) \right] \cdot (x-1) =$$

$$\left[\left(\frac{x^2+1}{x} \right) \left(\frac{x}{(x+1)(x-1)} \right) \right] \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$6.- \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)} - \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)} =$$

$$\frac{x(x-1)-x(x-2)-x}{(x-2)(x-1)} = \frac{0}{(x-2)(x-1)} = 0$$